ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 6, с. 791–802

УДК 519.63

СИСТЕМЫ Б.Н. ДЕЛОНЕ КАК ОСНОВА ГЕОМЕТРИИ ДИСКРЕТНОГО МИРА[1)]

Р. В. Галиулин

(117333 Москва, Ленинский пр., 59, Ин-т Кристаллографии РАН)
e-mail: galiulin@ns.crys.ras.ru *

Поступила в редакцию 01.10.2002 г.
Переработанный вариант 13.01.2003 г.

С помощью триангуляции Делоне анализируется поведение дискретных открытых систем, состоящих из одинаковых частиц в пространствах постоянной кривизны. При получении энергии извне такие системы достигают устойчивости кристаллизуясь. Библ. 41. Фиг. 10.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1924 году выдающийся геометр Б.Н. Делоне представил оригинальную конструкцию дискретных множеств (с фиксированным радиусом дискретности и обладающих конечным радиусом покрытия) и метод ее исследования [1]. Эти множества стали называть “системами Делоне” [2], а метод исследования – “триангуляцией Делоне” [3]. Этим методом Делоне получил ряд важных результатов по геометрии решеток (полных совокупностей точек с целыми координатами относительно некоторого фиксированного репера): разработал классификацию решеток по комбинаторике и симметрии параллелоэдров Дирихле, получил алгоритм однозначного выбора репера в данной решетке и др. [4, 5]. Затем этот метод был применен в [6, 7] для исследования правильных систем Делоне (каждая точка этой системы равно окружена всеми другими ее точками), которые служат моделями идеальных кристаллов. Кульминации своего развития этот метод достиг на высказанной автором возможности определения правильных систем Делоне через локальное окружение их точек и доказанной М.И. Штогриным теореме о правильности двумерных систем Делоне, у которых каждая точка одинаково окружена другими ее точками в круге, радиус которого равен четырем радиусам минимального круга покрытия (1974 г.). Затем эта теорема была качественно (без указания строгих границ) обобщена на n-мерные пространства постоянной кривизны (локальная теорема, см. [8]). Стало ясно, что системы Делоне пригодны для моделирования не только идеальных кристаллов, но и хаотических систем [2, 9], а также процессов их упорядочения [10].

1) Системы Делоне (как общие, так и частные) могут служить расчетными сетками, наиболее естественно приспособляемыми к каждой конкретной задаче. Это существенно расширяет ассортимент расчетных сеток и обеспечивает его полноту. В случае евклидовой плоскости имеется только 11 комбинаторноразличных правильных таких сеток (сетки Кеплера–Шубникова–Делоне), на двумерной сфере 18 сеток (реберные сетки тел Платона и Архимеда) плюс реберные сетки призм и антипризм [10].

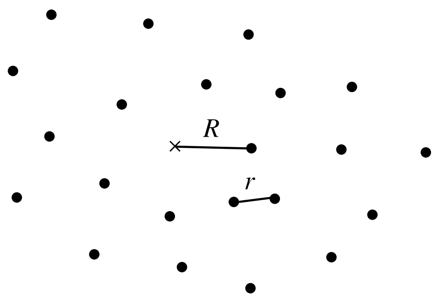
На плоскости Лобачевского правильные расчетные сетки можно составить из любого правильного многоугольника. Неевклидовы расчетные сетки наиболее естественны для изучения структур с экстремальным состоянием вещества: нейтронных звезд, черных дыр, плазменных кристаллов.

2. СИСТЕМЫ ДЕЛОНЕ

Определение 1. *Системой Делоне* называется n-мерное множество точек (фиг.1) , удовлетворяющее следующим двум аксиомам:

а) *дискретность*: расстояние от любой точки множества до ближайшей к ней точки этого же множества не меньше длины r некоторого фиксированного отрезка;

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00101).



Фиг. 1.

б) *покрываемость*: расстояние от любой точки n-мерного пространства до ближайшей к ней точки системы не больше длины R некоторого фиксированного отрезка.

Эти две аксиомы, дополняя друг друга, обеспечивают примерно равномерное распределение точек в пространствах постоянной кривизны (евклидовом, сферическом, гиперболическом). Центры атомов в любом атомном образовании (плазме, газе, жидкости, аморфном теле, кристалле) образуют систему Делоне. Несмотря на простоту требований, теория систем Делоне, даже в общей ее формулировке весьма содержательна. Перечислим некоторые их свойства.

Лемма о связности. *Любые две точки системы* Делоне *можно соединить ломаной, вершинами которой являются точки этой системы, а звенья не превосходят по длине* $2R$.

Лемма о полномерности локального окружения. *Внутри шара радиуса* $2R$ *содержится* n*-мерная совокупность точек из системы* Делоне.

Лемма об ограниченности соотношения радиусов. *Верно неравенство* $r/R \le 2$.

Интересно отметить, что равенства это отношение достигает только в одномерном случае, а его максимуму на евклидовой плоскости соответствует решетка, построенная на правильном треугольнике. В случае евклидова пространства максимуму отношения тоже соответствует решетка – так называемая кубическая объемно центрированная. В случае трехмерного пространства имеет место такой экспериментальный факт: отношение r/R в системах Делоне для центров атомов в наиболее устойчивых атомных структурах больше единицы.

3. ТРИАНГУЛЯЦИЯ ДЕЛОНЕ

С каждой системой Делоне однозначно связывается граф, вершинами которого служат все точки системы Делоне, а ребра строятся по следующему правилу.

Среди точек системы Делоне раздувается пустой шар, центр которого не в точке системы, до тех пор, пока этот шар не коснется точки системы. Затем этот шар раздувают так, чтобы коснувшаяся его точка оставалась на поверхности шара, и до тех пор, пока шар не коснется второй точки системы. Процесс этот может продолжаться до тех пор, пока на поверхности шара окажется не менее $n + 1$ точек. На точки, оказавшиеся на поверхности шара, натягивается выпуклая оболочка. Ее ребра и являются ребрами триангуляции Делоне. Затем шар “проталкивается” через грань выпуклой оболочки, и процесс повторяется до тех пор, пока все пространство не окажется разбитым такими выпуклыми оболочками (многогранниками Делоне, сам автор их называл многогранниками L). Если полученное таким способом разбиение (разбиение Делоне) составлено из одних симплексов, то соответствующая система Делоне называется общей. Общие системы допускают “шевеления”, которые не приводят к изменению комбинаторики триангуляции. В остальных случаях (частных системах Делоне) разбиение может состоять из любых многогранников (а не только из симплексов), что иногда ошибочно принимают за неоднозначность триангуляции Делоне.

Общие системы Делоне нашли широкое применение в вычислительной математике и физике при вычислении сложных многомерных функций, где иногда общая система Делоне более приемлема, как расчетная сетка, чем решетка. Затем они стали применяться при разведке нефтяных месторождений для поиска оптимального расположения буровых скважин [4]. Удобным свойством систем Делоне при таких применениях является то, что при добавлении новой точки или при уничтожении точки триангуляция изменяется только в ближайшей окрестности этой точки.

Общую систему Делоне можно рассматривать как модель идеального газа (газ Делоне). Однако классические параметры идеального газа до сих пор не связаны с параметрами систем Делоне (имеется в виду с r и R). Нахождение этих связей может принципиально изменить теорию роста кристаллов из газовой фазы. Воз-можно, что жидкостями являются такие системы Делоне, которые меняют триангуляцию Делоне при тепловых колебаниях атомов.

Триангуляция Делоне является также прямым методом решения целого ряда геометрических задач. Например, триангуляция Делоне для n точек на двумерной сфере ($n > 3$) дает реберную сетку выпуклого многогранника.

4. ЛОКАЛЬНО ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДЕЛОНЕ

Определение 2. Систему Делоне назовем *локально правильной*, если все ее точки имеют одинаковое окружение в сфере радиуса $2R$.

Определение 3. *Точечным преобразованием симметрии* называется точечное взаимно однозначное отображение пространства на себя, при котором не меняются расстояния между точками и хотя бы одна точка пространства остается на месте.

Определение 4. Два точечных преобразования симметрии будем относить к одному типу, если их собственные подпространства (совокупности точек, не меняющих своего положения) одинаковой размерности.

Собственное подпространство данного преобразования симметрии называют также его *элементом симметрии*.

Лемма о типах точечных преобразований симметрии. *В трехмерном евклидовом пространстве существует* 4 *типа точечных преобразований симметрии*: *тождественное преобразование*, *отражение в плоскости*, *поворот вокруг прямой* (*оси симметрии*), *поворот вокруг прямой с отражением в точке*, *принадлежащей этой прямой* (*зеркально-поворотная ось симметрии*, *частным случаем которой является отражение в центре инверсии*).

Определение 5. *Порядком оси симметрии* называется минимальное число поворотов вокруг этой оси, приводящих к тождественному преобразованию.

Теорема 1. *Порядок осей симметрии*, *которыми могут обладать точки в локально правильных системах* Делоне 3-*мерного евклидова пространства в окрестности радиуса* $2R$, *не превосходит* 6.

Таким образом, подобные локальные ограничения сильно упорядочивают системы Делоне, сближая их с системами точек, соответствующих центрам атомов в кристаллических структурах. Но неясно какие ограничения надо наложить на системы Делоне, чтобы выделить только системы, соответствующие кристаллическим структурам.

5. ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДЕЛОНЕ

Главная особенность кристаллических структур состоит в том, что они состоят из одинаковых частиц (отдельных атомов или конечных их совокупностей), которые одинаково окружены всеми другими такими же частицами. Если все эти частицы заменить точками, каждая из которых имеет такое же одинаковое окружение другими точками, как и соответствующая частица, то получим так называемую правильную систему Делоне.

Определение 6. Система Делоне называется *правильной*, если каждая ее точка равно окружена всеми другими ее точками.

Из равенства окружения точек следует, что какие бы две точки правильной системы Делоне мы ни взяли, существует преобразование симметрии, переводящее эти точки друг в друга и всю систему Делоне в себя. Полная совокупность таких преобразований образует группу. Эта группа и называется *пространственной кристаллографической группой*. В России ее называют *фёдоровской группой* в честь Е.С. Фёдорова, выдающегося геометра, кристаллографа и философа, представившего в 1890 году полный список этих групп (230). Интересно отметить, что Фёдоров делал эту работу одновременно с немецким математиком Шенфлисом (1853–1928), и они несколько раз сверяли свои результаты, поправляя друг друга.

Шенфлис употреблял в работе методы теории групп. Фёдоров же делал работу чисто геометрически. Позднее он представил группы алгебраическими уравнениями. Но уравнения эти не оказали существенного влияния на развитие кристаллографии, несмотря даже на то, что позже этот вывод был повторен С.А. Богомоловым [11]. Современная наука руководствуется алгебраическим выводом Цассенхауза [12] и его геометрической интерпретацией [13].

Рассмотрим теперь все возможные типы преобразования симметрии трехмерного евклидова пространства. В общем случае преобразование симметрии состоит из точечного преобразования и сдвига пространства на некоторый вектор, разный для разных точек пространства. Среди всех этих векторов выделим минимальные по длине равные векторы. Для точечных преобразований симметрии минимальный вектор равен нулю.

Лемма о минимальном векторе. *Полная совокупность минимальных векторов*, *соответствующих данному преобразованию симметрии*, *образует подпространство*.

Имеется 3 типа преобразований симметрии с отличным от нуля минимальным вектором: параллельный перенос, плоскость скользящего отражения и винтовой поворот. Таким образом, вместе с четырьмя типами точечных преобразований симметрии они представляют все типы преобразований симметрии фёдоровской группы.

Фёдоровская группа – главный критерий, отличающий кристаллические структуры от всех других атомных образований. Если работа не затрагивает фёдоровских групп, она не может считаться кристаллографической, так как рассматривает более общие состояния вещества. Но приведенное выше определение фёдоровских групп практически ничего не дает для понимания процесса роста кристалла.

Теорема Штогрина (см. [14]). *Двумерная система Делоне правильная, если каждая ее точка равно окружена в сфере радиуса* $4R$.

Как было показано Энгелом (см. [15]) на конкретном примере, в случае трехмерного пространства равного окружения в сфере радиуса $4R$ уже недостаточно. Он предполагает, что граница эта равна $6R$. Но строгой границы для трехмерного пространства до сих пор не найдено.

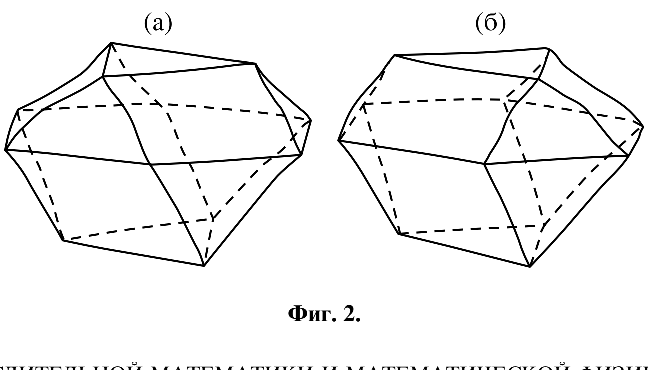
Из теоремы Штогрина следует, что двумерный кристалл растет дополнением окружений атомов, присоединившихся к затравке (конечному куску атомной структуры), и каждому из этих атомов совсем не обязательно знать, как располагаются другие атомы, за исключением тех, которые находятся от него на расстоянии, не превышающем $4R$.

Одинаковое окружение всех точек системы Делоне в сфере радиуса $4R$ однозначно предопределяет всю систему в целом. Это будет только правильная система. При уменьшении этого окружения на любое ε появляются неправильные системы Делоне, которые можно назвать дефектными кристаллами. Продемонстрируем это на структуре алмаза (см. [16], трехмерный случай). Всем хорошо известно, что в структуре алмаза каждый атом углерода окружен другими атомами углерода по правильному тетраэдру. Поставим теперь обратный вопрос. Пусть каждый атом углерода имеет возможность окружиться по правильному тетраэдру. Получится ли алмаз? Оказывается, нет. Получится полисинтетический двойник по октаэдру, поскольку имеется другая модификация углерода – лонсдейлит, в которой каждый атом углерода тоже окружен по правильному тетраэдру. Кристалл получится только в том случае, если и во второй сфере окружение будет одинаковым. В алмазе вторая координационная сфера представляет собой кубооктаэдр (фиг. 2а), а в лонсдейлите – гексагональный кубооктаэдр (фиг. 2б).

Итак, в каждой кристаллической структуре можно выделить конечное число связей, ответственных за ее образование. Вопрос о возникновении кристалла можно решать только на основе химических связей. Именно по этой причине химики глубже чувствуют кристаллографию, чем, например, физики. Если же одинаковое окружение сделать меньше $2R$, то при этом можно потерять размерность (лемма о размерности локального окружения) и появится хаос.

Теорема 2 (см. [17]). *Устойчивое состояние (минимум энергии) можно достигнуть только на системах, состоящих из одинаковых частиц, одинаково окружающих друг друга, т.е. только на идеальных кристаллах.*

Следовательно, все заключено между двумя предельными состояниями материи: хаосом (идеальным газом) и идеальным кристаллом. Открытая система, получая извне энергию, недостаточную для ее разрушения, тратит эту энергию на упорядочение. А идеальный порядок может быть только в кристаллах. Но кристаллы могут быть во всех трех пространствах постоянной кривизны: евклидовом, сферическом и гиперболическом (пространство Лобачевского). Для появления кристалла необходимо, чтобы во всех токах пространства кривизна была одинакова. Вот почему у евклидовых кристаллов грани плоские.

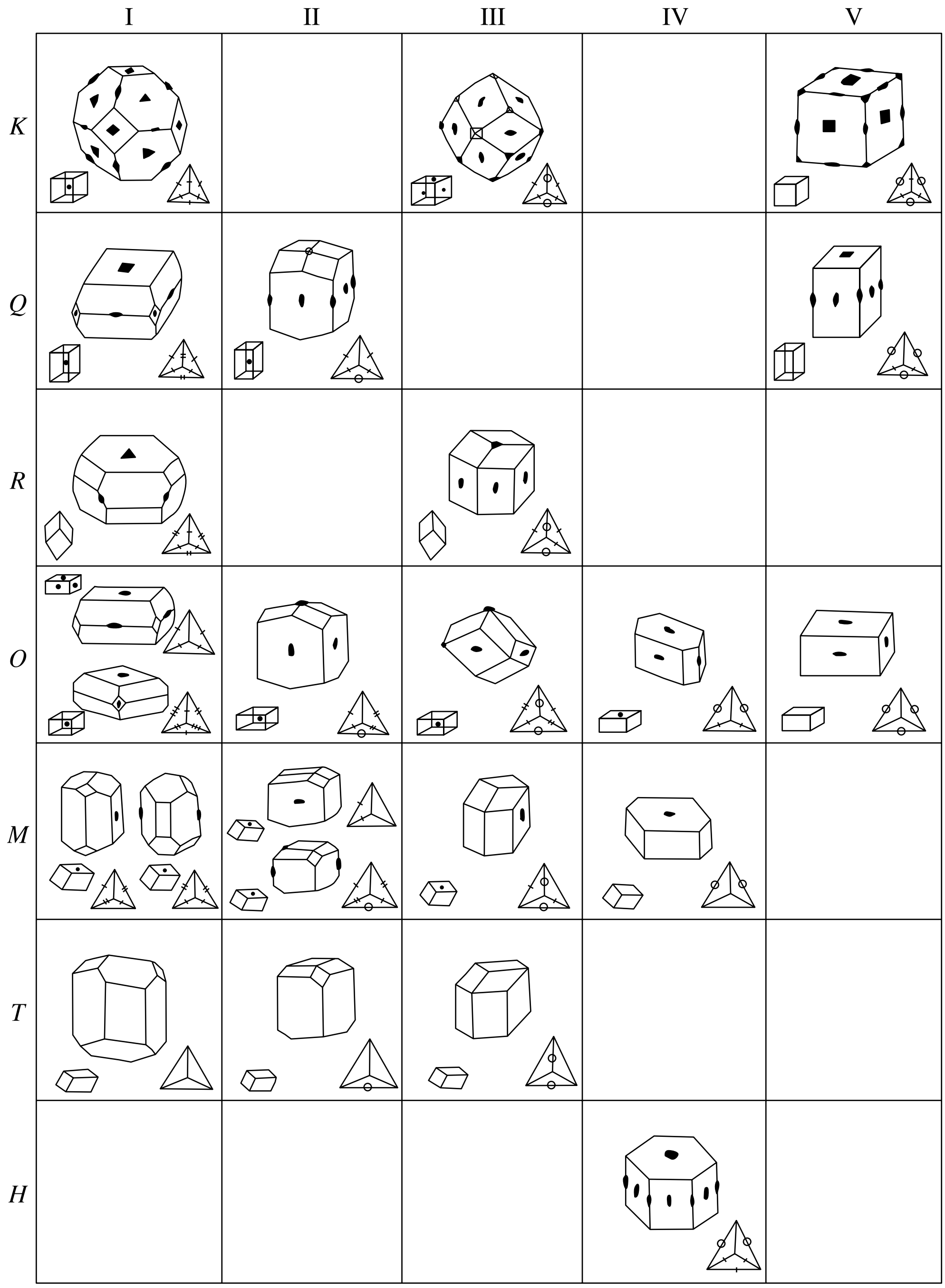


Фиг. 2.

6. СОРТА ДЕЛОНЕ РЕШЕТОК

Простейшими системами Делоне в евклидовом пространстве являются решетки. Их классификация была разработана французским естествоиспытателем (другом знаменитого математика Коши) Браве в 1850 году (14 типов Браве решеток, см. [18]). Делоне построил свою классификацию на основе областей Дирихле – совокупностей точек, каждая из которых ближе к данному узлу решетки, чем к любому другому ее узлу (см. [19, 20] и фиг. 3).

Геометрическая красота и физическая глубина этой классификации до сих пор поражают исследователей. Одна и та же таблица решает сразу несколько фундаментальных задач: явно представляет все идеальные габитусы кристаллов (виды огранок для случая, если кристалл ограняется наиболее плотными сетками), дает классификацию как ячеек Вигнера-Зейца, так и первых



Фиг. 3.

зон Бриллюэна, и т.д. Например, из этой таблицы видно, что могут быть фазовые переходы, при которых первая зона Бриллюэна меняет свою комбинаторику без изменения симметрии решетки. Определения сорта Делоне решетки осуществляются с помощью приведения Делоне [21].

7. СТЕРЕОЭДРЫ

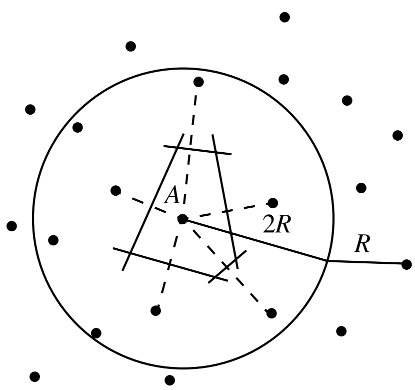
С каждой правильной системой Делоне однозначно связывается многогранник (стереоэдр Дирихле), который строится следующим образом. Вокруг любой точки системы Делоне описывается шар радиуса $2R$. Попавшие в этот шар точки системы Делоне соединяют с точкой системы, совпадающей с центром шара, и полученные таким способом отрезки делят пополам перпендикулярными к ним плоскостями (см. фиг. 4). Делоне совместно с Сандаковой была доказана теорема о том (см. [6]), что число комбинаторно различных стереоэдров (их реберные сетки не натягиваются друг на друга) конечно. И Делоне много лет надеялся, что ему удастся создать полный атлас стереоэдров Дирихле для трехмерного евклидова пространства. Сложность задачи была вскрыта Штогриным [7]. Только для одной фёдоровской группы (триклинной с центром инверсии) было выведено 165 комбинаторно различных таких стереоэдров. Число граней у некоторых достигало 22, а Делоне тогда полагал, что их не больше 16, хотя строгое рассмотрение этого вопроса привело его к цифре 384. Когда был найден стереоэдр с 38 гранями [22], то об этой задаче совсем забыли. Интересно отметить, что буквально накануне выхода работы Энгела известный кристаллограф Лавес опубликовал статью о том, что число граней стереоэдра не должно превышать 26. Задача о максимальном числе граней у стереоэдра до сих пор остается открытой. Не составлен также и полный список стереоэдров, хотя современные компьютерные программы значительно облегчают выполнение этой задачи.

Штогрин [23] доказал конечность числа типов стереоэдров Дирихле–Вороного для любой фиксированной дискретной группы с конечной фундаментальной областью. Для фёдоровских групп евклидова пространства – это теорема Делоне-Сандаковой, для пространства Лобачевского – это новая теорема.

Стереоэдры, построенные для всех точек правильной системы Делоне, образуют правильное разбиение пространства, которое называют разбиением Дирихле-Вороного. Но было обнаружено (см. [24]), что в некоторых правильных разбиениях евклидовой плоскости на планигоны Дирихле-Вороного некоторые их центры действия могут образовывать системы Делоне, которые не являются правильными. Для плоскости все такие системы Делоне найдены [24]. Весьма важно найти их и для трехмерного пространства. Важно потому, что если, например, кристаллическая структура будет расти путем агрегации многогранников Дирихле-Вороного для атомов, расположенных по такой системе Делоне, то будут получаться микродвойники, а идеального кристалла заведомо не получится.

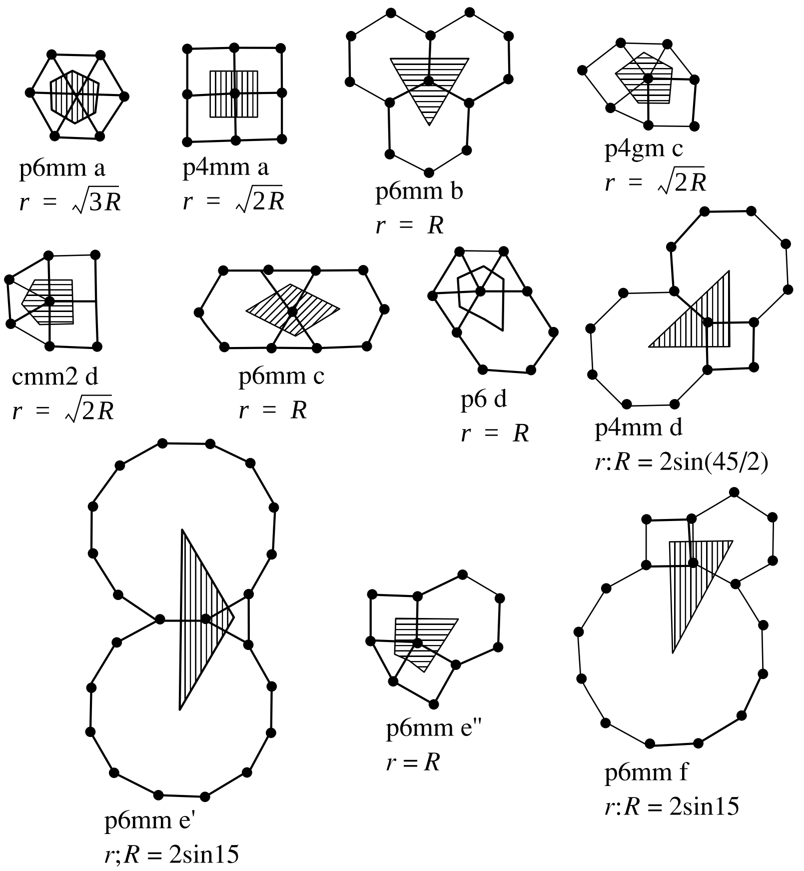
8. ТОПОЛОГИЯ ГРАФОВ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЕЛОНЕ

В 1916 году известный кристаллограф А.В. Шубников поставил следующую задачу (см. [25]). Пусть каждый атом на плоскости имеет одинаковое число связей с другими атомами. Сколько разных комбинаторно-правильных сеток они могут дать? Шубников нашел 11 разных таких сеток. На языке систем Делоне эта задача формулируется следующим образом: сколько имеется комбинаторно различных триангуляций Делоне на двумерных правильных системах Делоне?



Фиг. 4.

Эта чисто топологическая задача показывает, что двумерная теория правильных систем Делоне (двумерная кристаллография) имеет чисто топологическое обоснование. Поэтому при росте двумерного кристалла совсем не обязательно, чтобы атомы скурпулезно заботились о длине связей и углах между ними. Чтобы образовался кристаллический зародыш, достаточно, чтобы внутренние атомы этого зародыша имели одинаковое число связей! Это условие очень сильно ослабляет требования на кристаллообразование. Делоне также показал, что 11 сеток Шубникова можно представлять узорами, составленными только из правильных многоугольников (см. [26] и фиг. 5), соединив тем самым эту задачу с паркетами Кеплера [27].



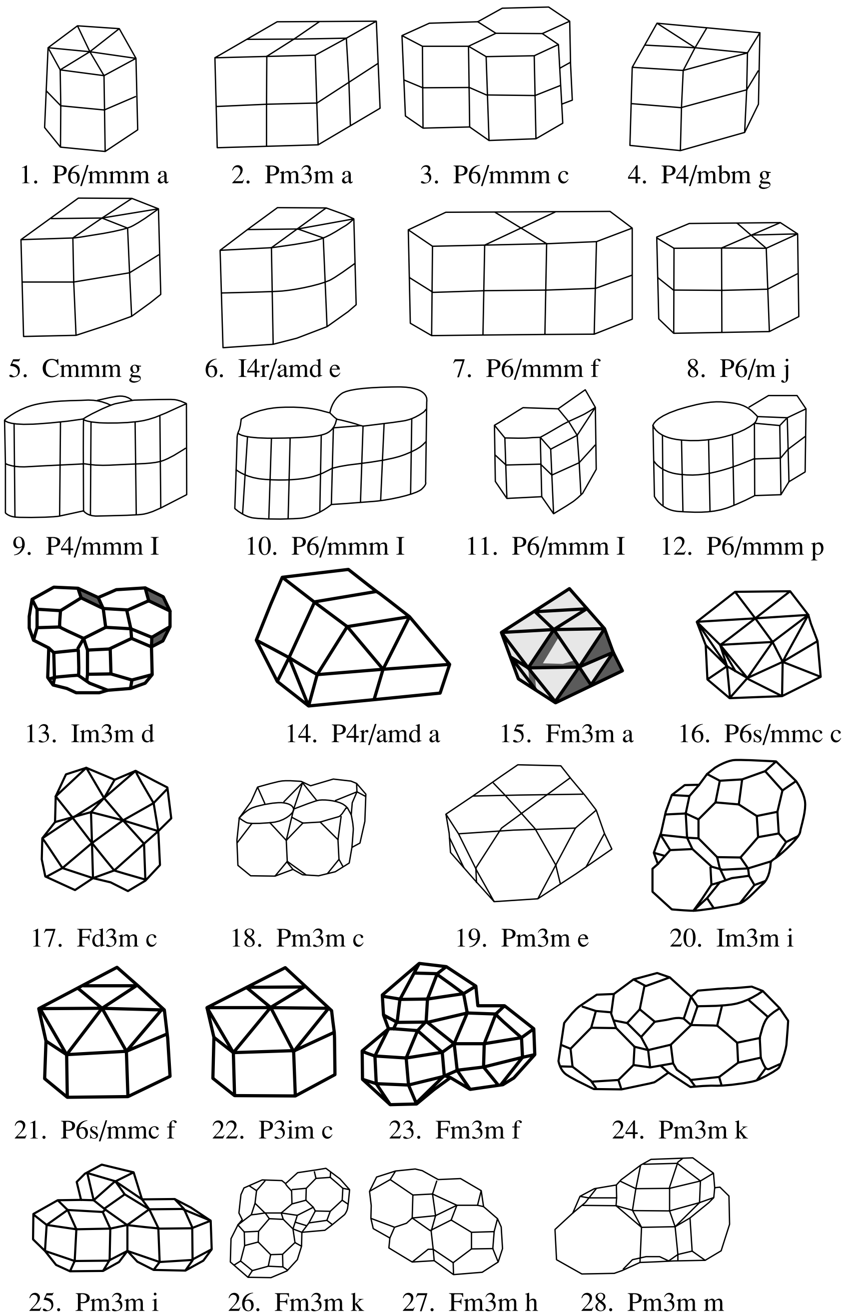
Фиг. 5.

В случае трехмерного пространства аналогичное решение вряд ли может быть получено. Если же учитывать только кеплеровскую линию, то она вошла в так называемые разбиения Андреини [28] – разбиения евклидова трехмерного пространства на правильные и полуправильные изогоны, вершины которых образуют правильную систему Делоне. Андреини нашел не все такие разбиения. В настоящее время известно 28 разбиений Андреини (см. фиг. 6). Однако полнота этого списка до сих пор не доказана.

Разбиения Андреини выводят исследования правильных систем Делоне на новый геометрический уровень. Это есть обобщение теории плотнейших шаровых упаковок, в которой подавляющее большинство кристаллических структур притягивалось либо к кубической плотнейшей упаковке (15-й случай), либо к гексагональной (16-й случай). Теперь кристаллография обладает 28 такими случаями, что позволяет строго и геометрически наглядно представлять довольно сложные кристаллические структуры.

Символом каждого разбиения Андреини является символ фёдоровской группы, которой обладает соответствующая правильная система Делоне, и символ позиции Уайкова этой правильной системы. Например, символ Fm3m a означает, что вершины рассматриваемого разбиения Андреини образуют правильную систему, группой симметрии которой является фёдоровская группа Fm3m, а позиция Уайкова этой правильной системы обозначена символом a. Триангуляцию Делоне такой правильной системы Делоне можно рассматривать как построение соответствующего разбиения Андреини.

Очевидно, что каждому разбиению Андреини взаимно однозначно соответствует разбиение Дирихле–Вороного, стереоэдры которого (стереоэдры Андреини) могут иметь не более 12 граней. Возможно, что проблема полноты списка разбиений Андреини будет решена путем нахождения стереоэдров Андреини или перечислением всех разных звезд векторов смежности стереоэдров Андреини. Заметим, что все стереоэдры Андреини вписываются в шар и любые их диагонали по длине больше векторов смежности.



Фиг. 6.

9. О НЕОБОБЩАЕМОСТИ ФЁДОРОВСКИХ ГРУПП

Заметим теперь, что фёдоровские группы – это дискретные группы с конечной независимой областью. Неоднократно делались попытки найти другие группы симметрии атомных структур, которые содержали бы фёдоровские группы как свои подгруппы. Однако для этого надо отказаться либо от дискретности атомных структур, либо от конечности фундаментальной области. Например, было замечено, что в некоторых кристаллах, состоящих из молекул (молекулярных кристаллах), например в кристаллах толана, одинаковые молекулы распадаются на две совокупности, не связанные преобразованиями симметрии фёдоровской группы. Как химиками, так и физиками было опубликовано около десятка статей в которых конструировались так называемые суперфёдоровские группы, объединяющие такие молекулы между собой. Но искомая группа должна быть дискретной, а ее независимая область должна быть по крайней мере в 2 раза меньше независимой области фёдоровской группы, соответствующей кристаллической структуре толана. Следовательно, она и подавно будет конечной, т.е. кроме фёдоровской группы ничего другого в принципе не может появиться. Таким образом, для толана и других структур, содержащих одинаковые единицы в независимой области, суперфёдоровских групп не существует. Здесь уместен другой вопрос: почему одинаковые частицы не хотят образовывать общую правильную систему точек?

В 1984 году был получен сплав с дальним порядком, обладающим осями симметрии 5-го порядка, запрещенными в кристаллах [29], т.е. открывалась возможность выращивать абсолютно упорядоченные атомные структуры, обладающие любой симметрией. А по словам Ландау (1908–1968), симметрия является фундаментальным свойством вещества [30, 31]. Например, переход вещества из нормального состояния в сверхтекучее или сверхпроводящее обязательно сопровождается изменением симметрии. Кристаллография сильно ограничивает возможность таких изменений. Она не допускает так называемой икосаэдрической симметрии, которой обладают два из тел Платона – додекаэдр и икосаэдр и 6 из тел Архимеда (фиг. 7). Квазикристаллы (так были названы эти соединения) снимали эти ограничения без нарушения, как тогда казалось, дальнего (абсолютного) порядка в расположении атомов.

По мнению Фёдорова, кристаллография – основа всех естественных наук [32]. Поэтому научные результаты не должны противоречить ее законам. Полинг (1901–1994) сразу же предложил две модели, объясняющие физический эксперимент по получению квазикристаллов, не противоречащих законам кристаллографии [29]. По первой модели квазикристаллы являются обычными закономерными сростками кристаллов, двойниками (весьма распространенное явление). Для второй модели Полинг ввел понятие аппроксимантов, т.е. кристаллов, которые, с точностью до ошибок эксперимента обладают икосаэдрической симметрией. Подобного типа кристаллы образует, например, пирит.

Но эти два весьма красивых примера не смогли противостоять наплыву статей о квазикристаллах, который не иссякает по сей день. В связи с этим вспомнились и появились новые, чисто математические результаты, показывающие исключительность кристаллографической симметрии [33] . Оказывается, что дальний порядок при росте вещества из затравки может быть только в кристаллических структурах. Все остальные вещества содержат элементы неупорядоченности, хаоса. Вот почему строгое изучение структуры вещества, даже не атомного, даже жидкости должно начинаться с кристаллографического порядка, смысл которого состоит в следующем.

Если исключить из рассмотрения электроны, о структуре которых пока ничего не известно, то все известные в настоящее время вещества дискретны и обладают небольшим (строго говоря, конечным) числом различающихся между собой частиц. А одинаково устроенные частицы стараются иметь одинаковое окружение, чтобы ничем не отличаться друг от друга [33]. Только при этих условиях вещество становится устойчивым, достигается минимум его внутренней энергии.

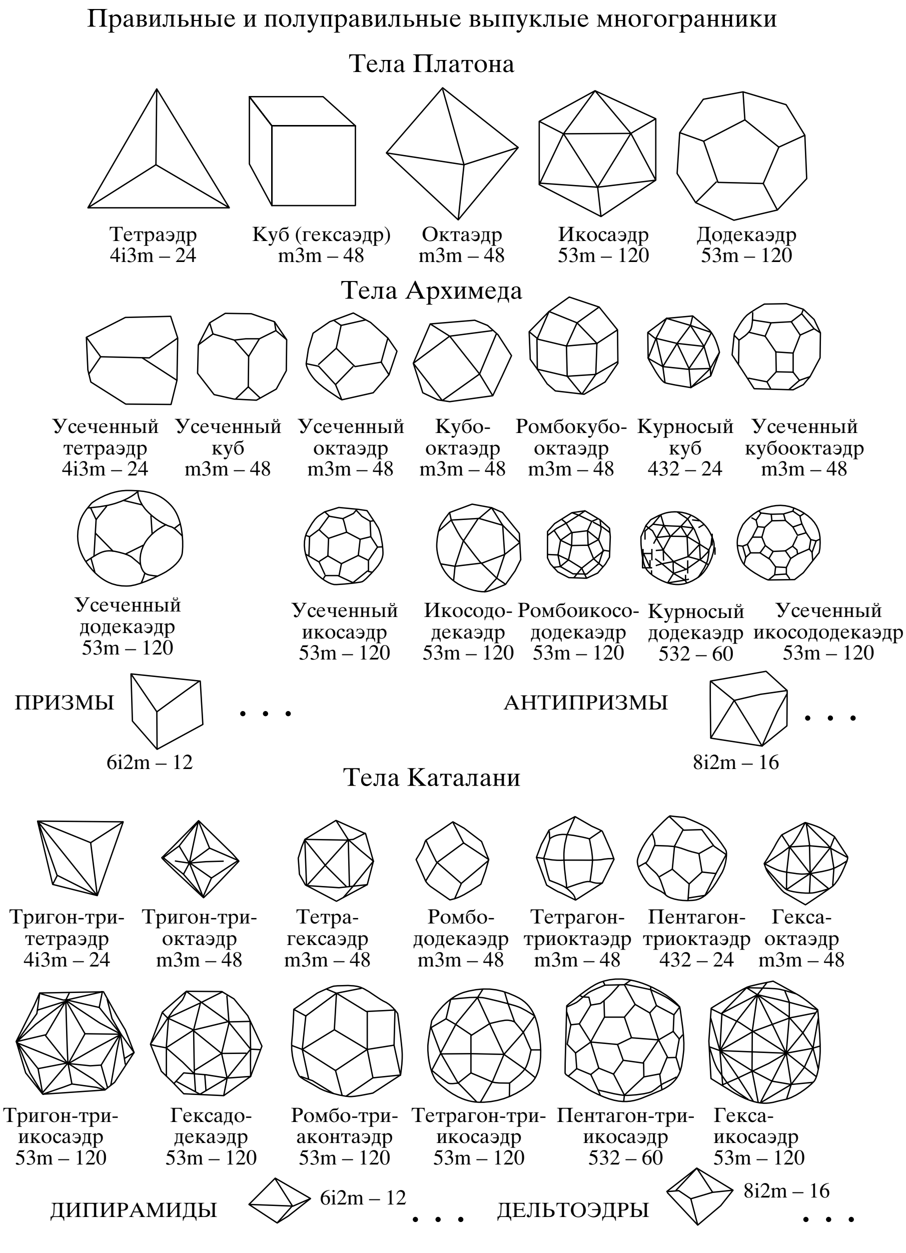
Теорема 3. *На двумерной сфере все устойчивые трехмерные ансамбли одинаковых частиц, взаимодействующих друг с другом, исчерпываются телами Платона, телами Архимеда и двумя бесконечными сериями призм и антипризм* (*фиг*. 7).

Это все комбинаторно различные правильные расположения точек на двумерной сфере (все сферические правильные системы Делоне, т.е. идеальные сферические кристаллы). Найденные в [34] отличные от этих ансамбли неустойчивы потому, что они состоят из неэквивалентных орбит. Поэтому одна из этих орбит всегда окажется предпочтительней другой по какому-либо свойству. Следует также упомянуть тело Ашкинузе (скрученный Архимедов ромбокубооктаэдр), которое некоторые геометры причисляют к телам Архимеда. В школьных учебниках геометрии его удачно назвали псевдоархимедовым [35]. Вершины этого тела, как и подавляющее большинство тел Лифшица–Лозовика, также не образуют правильной системы Делоне. Пример Ашкинузе интересен в другом отношении: он акцентирует внимание на единственном теле Архимеда, которое однозначно не достраивается ближайшим окружением вершины тела другими ее вершинами.

Теорема 4. *Объекты могут быть абсолютно неразличимыми только в кристаллических структурах*.

10. НЕЕВКЛИДОВА КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

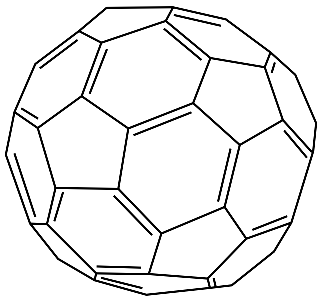
Изложенное выше касалось в основном кристаллических структур в евклидовом пространстве. Однако дискретные группы с конечной независимой областью имеют место еще в двух пространствах – сферическом (в котором сумма углов треугольника больше 180°) и в пространстве



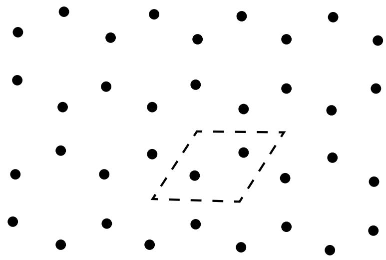
Фиг. 7.

Лобачевского (в котором сумма углов любого треугольника меньше 180°). Примером сферического кристалла является фуллерен C60 (фиг. 8). Он обладает группой икосаэдра. Фуллерен по своей химической сути является двумерным сферическим алмазом, равно как графит – двумерный евклидов алмаз (см. фиг. 9). Поэтому естественно рассмотреть и двумерный алмаз Лобачевского, который вероятней всего будет выглядеть (в трехмерном пространстве) как упаковка раздробленных сеток с семиугольными ячейками в виде обезьяньего седла (фиг. 10). Такую форму имеют кристаллы доломита [36]. Заметим также, что, по теории А.А. Власова [37], растущий кристалл может менять кривизну пространства. А из уравнения Власова состояния плазмы (см. [38]) следует возможность существования плазменного кристалла.

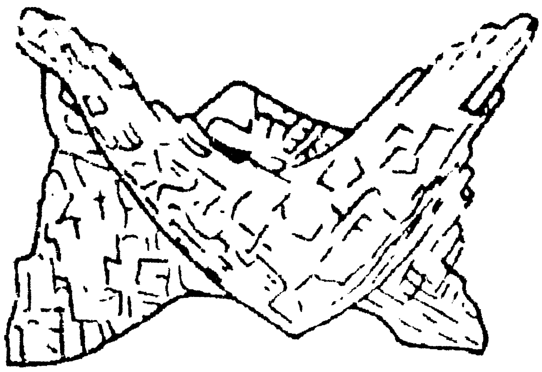
В рамках неевклидовой геометрии проблема квазикристаллов решается самым классическим образом: квазикристалл есть идеальный кристалл пространства Лобачевского [39]. Это объясняет, в частности, появление некристаллографической локальной симметрии в структурах, содержащих атомы с *d*- и *f*-оболочками. Такие атомы не могут бездефектно встроиться в идеальный евклидов кристалл, поскольку многогранники, моделирующие эти оболочки (пентагональ-



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

ная и гептагональная правильные антипризмы), имеют оси симметрии 5-го и 7-го порядков, недопустимые в идеальных евклидовых кристаллах.

В пространстве Лобачевского имеется бесконечная серия дискретных групп с конечной фундаментальной областью (фёдоровских групп) с икосаэдрической точечной группой симметрии. Заметим, что правильные системы Делоне, соответствующие этим группам, могут быть настолько сложными, что без предварительного знакомства с ними они могут быть восприняты как хаотические системы. Если, например, супергалактики образуют такую правильную систему [40], то вряд ли рядовой астроном увидит в ней порядок. Для этого надо знать кристаллографию Лобачевского. По-видимому, именно по этой причине наблюдатели останавливаются на евклидовой кристаллографии [41].

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В открытых системах минимума энергии вещество достигает, упорядочиваясь. А идеальный порядок достигается только на кристаллических структурах. По мнению Фёдорова [32], кристаллы – это смерть. "Жизнь же имеет дело только с неустойчивым." И далее: "Жизнь никогда ничего не достигает окончательно, а вечно стремится достигнуть. Вот истинная философия природы!". Вселенная живет кристаллизацией и периодически повторяющимися коллапсами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Delaunay B.N.* Sur la sphere vide // Proc.Internat. Math. Congress. Toronto1924. Univ.Toronto Press, 1928. P. 695–700.
2. *Галиулин Р.В.* Системы Делоне // Кристаллография. 1980. Т. 25. № 5. С. 901–908.
3. *Агиштейн М.Э, Мигдал А.А.* Как увидеть невидимое. Эксперимент на дисплее // Первые шаги вычисл физ. Сер. Кибернетика. М. Наука, 1989. С. 141–170.
4. *Делоне Б.Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // Успехи матем. наук. 1937. № 3. С. 16–62.

5. *Делоне Б.Н., Долбилин Н.П, Рышков С.С., Штогрин М.И.* Новое построение теории решетчатых покрытий n-мерного пространства равными шарами // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1970. Т. 34. С. 298–307.
6. *Делоне Б.Н,Сандакова Н.Н.* Теория стереоэдров // Тр. МИ АН СССР М., 1961. Т. 64. С. 28–51.
7. *Штогрин М.И.* Правильные разбиения Дирихле-Вороного для второй триклинной группы // Тр. МИ АН СССР. М., 1973. Т. 123.
8. *Делоне Б.Н, Долбилин Н.П., Штогрин М.И, Галиулин Р.В.* Локальный кри- терий правильности системы точек // Докл АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 19–21.
9. *Медведев Н.Н.* Метод Вороного–Делоне в исследовании структуры некри сталлических систем// Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
10. *Галиулин Р.В.* Кристаллографическая картина мира // Успехи физ. наук. 2002. Т. 172. № 2. С. 229–233.
11. *Богомолов С.А.* Вывод правильных систем по методу Фёдорова. Ч. 1. Л.: Изд-во Кубуч. 1932; Ч. 2. 1934.
12. *Zassenhaus H.* Uber einen algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen // Commentaria Math. helvetici.1948. V. 21. P. 117–141.
13. .Галиулин Р.В. Матрично-векторный способ вывода фёдоровских групп: – Деп. ВИНИТИ, 1969.
14. *Штогрин М.И.* Правильные разбиения пространств постоянной кривизны и их приложения. – Автореф.дис. … докт. физ.-матем. наук. М.: МН РАН. 2000.
15. *Engel P.* Geometric crystallography Dordrecht, D.Reidel Publish. Co. 1986.
16. Галиулин Р.В.. Высшая кристаллография алмаза // Материаловедение. 1999. № 6. С. 2–5.
17. *Галиулин Р.В.* Геометрическая теория кристаллообразования // Кристаллография. 1998. Т. 43. № 2. С. 366–374.
17. *Браве О.* Кристаллографические этюды. М.: Классики науки, 1974.
18. *Delaunay B.N.* Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie // Z. Kristallogr. 1933. Bd. 84. S.109–149.
19. *Делоне Б, Падуров Н, Александров А.* Математические основы структурного анализа кристаллов. М.: Гостехтеориздат, 1934.
20. *Henri N., Lonsdaly K.* International Tables for X-Ray Crystallography. Birmingem: Kunoch Press. 1952.
22. *Engel P.* Über wirkungsberaeichsteilungen von kubischer Symmetrie // Z. Kristallogr. 1981. Bd. 157. S. 259–275.
23. *Штогрин М.И.* О конечности числа типов стереоэдров Дирихле–Вороного // Тр. семинара по дискретной матем. и ее приложениям. М.: МГУ, 1989 . С. 115–116.
24. *Штогрин М.И.* О центрах действия планигонов // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 2. С. 262–278.
25. Шубников А.В.. К вопросу о строении кристаллов // Изв. Императорской АН. 1916. Сер.6. Т. 10. № 9. С. 755–779.
26. *Делоне Б.Н.* Теория планигонов // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1959. Т. 23. № 3. С. 365–386.
27. *Kepler J.* Harmonice mundi. Lincii, 1619.
28. *Andreini A.* Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative // Mem. Soc. Italiana. Scienze. Ser. 3. 1905. V. 14. P.75–129.
29. *Гратиа Д. Квазикристаллы* // Успехи физ. наук.1988. Т. 156. № 2. С. 347–364.
30. Андреев А.Ф.. Сверхтекучесть, сверхпроводимость и магнетизм в мезоскопике // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 6. С. 655–663.
31. *Андреев А.Ф.* Мезоскопика и фундаментальные свойства пространства // Природа. 1998. № 12. С. 3–10.
32. *Фёдоров Е.С.* Перфекционизм. // Изв. СПб биол. лаб. 1906. Т. 8. Вып. 1. С. 25–65; Вып. 2. С. 9–63.
33. *Галиулин Р.В.* Фёдоровские группы – универсальный закон природы. // Природа. 1991. № 12. С. 20–36.
34. *Лифшиц А.М, Лозовик Ю.Е.* Квазидвумерные кристаллические кластеры на сфере: метод топологического описания // Кристаллография. 2002. Т. 47. № 2. С. 214–223.
35. *Смирнова И.М,Смирнов В.А.* Геометрия. М.: Просвещение, 2002.
36. *Galiulin R.V.* Noneuclidean crystallography // Science Spectra. 1998. Issue 14. P. 54–60.
37. *Кузьменков Л.С.* Рост кристаллов с сохранением их подобия. Процессы реального кристаллообразования. М.: Наука, 1977. С. 221–237.
38. *Власов А.А.* К обобщенной теории плазмы и теории твердого тела // Вестн. МГУ. Сер. физ. 1946. № 3–4. С. 63–96.
39. *Антонюк П.Н., Галиулин Р.В., Макаров В.С.* Квазикристалл – идеальный кристалл пространства Лобачевского // Природа. 1993. № 7. С. 28–31.
40. *Ivanenko D.D., Galiulin R.V.* Quasicrystal model of the Universe. // Тр. XVII Междунар. семинара по физ. высоких энергий. Протвино, 1995. С. 180–186
41. *Einasto J, Einasto M., Gotlober S. et al.* "A 120-MPC periodicity in the three-di-mensional distribution of galaxy superstructures // Nature. 1997. № 385. P. 139–141.