ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# SUR LA SPHÈRE VIDE

A la mémoire de Georges Voronoï

Par B. DELAUNAY

(*Presenté par* **I. Vinogradov,** *membre de l'Académie*)

Soit donné un système quelconque de points dans l'espace à $n$ dimensions. Je me propose de considérer une sphère se mouvant entre les points de ce système se rétrécissant et se dilatant à volonté et assujettie à la seule condition d'être «vide», c'est-à-dire de ne pas contenir dans son intérieur des points de ce système. C'est la «méthode de la sphère vide» que j'ai proposé pour la première fois dans une communication faite au Congrès de Toronto.

Je montre dans ce qui suit que le «theorème fondamental», qui est contenu dans le grand mémoire de Voronoï sur les formes quadratiques inseré dans les tomes 134 et 136 du Journal de Crelle, est une conséquence presque immédiate d'un lemme tout à fait général. Je pense que la démonstration plus simple du théorème fondamental de Voronoï, que je propose, contribuerat à répandre parmi les géomètres les resultats excessivement importants obtenus par Voronoï dans le mémoire mentionné du Journal de Crelle, qui était son dernier oeuvre.

§ **1. Lemme général.** *Soient $T$ des tétraèdres tout à fait arbitraires qui partagent uniformément l'espace à $n$ dimensions étant contigus par des faces entières à $n-1$ dimensions et tels qu'un domaine quelconque limité (c'est-à-dire à diamètre limité) ait des points communs seulement avec un nombre limité de ces tétraèdres, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'aucune sphère circonscrite à un tel tétraèdre ne contienne dans son intérieur aucun sommet d'aucun de ces tétraèdres est que cela ait lieu pour chaque paire de deux de ces tétraèdres contigus par une face à $n-1$ dimensions, c'est-à-dire que dans chaque telle paire le sommet d'un de ces tétraèdres ne soit pas intérieur à la sphère circonscrite à l'autre, et réciproquement.*

Il est évident que cela est nécessaire. Mais cela est aussi suffisant. En effet, soit $T_1$ un de ces tétraèdres, et $A$ un sommet d'un quelconque de ces tétraèdres. Soit $B$ un point intérieur de $T_1$. Si le segment de droite $AB$, en passant d'un tétraèdre de la partition dans un autre, coupe une face à moins que $n-1$ dimensions, on peut varier la position du point $B$ dans l'intérieur de $T_1$ de la sorte que cela n'ait plus lieu. Désignons par $T_1, T_2, T_3 \ldots T_k$ les tétraèdres consécutifs qui sont coupés par le segment $BA$ à partir du point $B$ jusqu'au point $A$, et soient $F_{12}, F_{23} \ldots F_{k-1k}$ les faces à $n-1$ dimensions par lesquelles sont contigus ces tétraèdres consécutifs et que coupe le segment $BA$ en passant d'un de ces tétraèdres dans un autre. Il est évident que le point $A$ est situé toujours du même côte d'un tel «plan» $F_{ii+1}$ à $n-1$ dimensions que le tétraèdre suivant $T_{i+1}$ des deux tétraèdres consécutifs $T_i$, $T_{i+1}$ qui sont contigus par ce plan. Nous allons nommer ce côté du plan «supérieur». Il est facile de montrer que si le sommet de $T_i$ n'est pas intérieur à la sphère circonscrite au tétraèdre $T_{i+1}$, et inversement, alors ou bien les sphères circonscrites à ces deux tétraèdres coïncident, ou bien le vecteur $C_iC_{i+1}$, qui unit les centres de ces sphères est dirigé du côté «inférieur» du plan $F_{ii+1}$ à son côté «supérieur». Mais il est facile de calculer que dans ce cas la «puissance» (le carré de la longueur de la tangente) $\tau_i$ du point $A$ par rapport à la sphère $(T_i)$ n'est pas moindre (algébriquement) que la puissance $\tau_{i+1}$ de ce point par rapport à la sphère $(T_{i+1})$. Nous obtenons ainsi:

$$\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \ldots\ldots\ldots\ldots \geqq \tau_{k-1} \geqq \tau_k,$$

mais comme $A$ est situé sur la surface même de la shpère $(T_k)$, on a $\tau_k = 0$, on a donc $\tau_1 \geqq 0$, c'est-à-dire que le sommet $A$ n'est pas intérieur à la sphère $(T_1)$.

Et le lemme est démontré.

Nous allons appliquer ce lemme à la théorie des systèmes parallélépipédaux de points.

§ 2. **Les tétraèdres L des systèmes parallélépipédaux E.** Soit $E$ un système parallélepipédal de points à $n$ dimensions. Il est facile de voir que le rayon de la sphère vide dans $E$ est limité, par exemple, il ne peut pas être plus grand que la moitié de la plus grande diagonale du parallélepipède fondamental de $E$ auquel appartient son centre. Si une sphère vide dans $E$ n'a pas de points de $E$ sur sa surface, son rayon peut être augmenté. Il peut aussi être augmenté si la sphère vide possède des points de $E$ sur sa surface, mais ces points sont tous situés dans un «plan» à moins de $n$ dimensions, par exemple cela peut être fait, si l'on éloigne le centre de la sphère de ce plan. Il s'en suit qu'il doit exister dans $E$ des sphères vides, qui ont sur leur surface un groupe $n$-dimensional de $n+1$ points de $E$. Nous allons nommer une sphère vide dans $E$, qui possède un groupe $n$-dimensional de points de $E$ sur sa surface, une sphère $(L)$ et un tétraèdre constitué par un groupe $n$-dimensional de $n+1$ de tels points un tétraèdre $L$ de $E$. Il est évident qu'il n'y a qu'un nombre limité de tétraèdres $L$ non homologues, c'ést-à-dire qui ne s'obtiennent pas l'un de l'autre par une translation le long d'un vecteur de $E$, parce qu'on peut supposer que tous ces tétraèdres $L$ ont le point $O$ de $E$ pour point commun, et alors tous les sommets de ces tétraèdres sont des points de $E$ situés à l'intérieur d'une sphère ayant le centre dans le point $O$ et dont le rayon est supérieur au plus grand diamètre que peut avoir une sphère vide dans $E$.

§ 3. **Sur les systèmes parallélépipédaux spéciaux.** Il peut arriver qu'il existe des sphères vides dans $E$ qui ont un groupe $n$-dimensional de plus que $n+1$ points de $E$ sur leur surface. Nous nommerons «spécial» un système $E$ pour lequel cela a lieu.

Proposition I: *Si le système, $E$ est spécial on peut toujours faire une telle transformation affine infiniment petite de l'espace après laquelle le système $E$ devient non spécial.*

Démonstration. Soient $\alpha_{ij}$ les coefficients d'une transformation affine $S$ de notre espace à $n$ dimensions. Considérons un groupe $n$-dimensional de $n+2$ points consphériques, c'est-à-dire situés sur la surface d'une même sphère. Si nous écrivons l'équation que remplissent dans ce cas les coordonnées de ces points, et que nous produisons la transformation $S$ dans cette équation, nous obtenons une équation $\varphi(\alpha_{ij})=0$ entre les coefficients $\alpha_{ij}$ de la transformation $S$, qui doit être satisfaite, si les $n+2$ points restent consphériques après la transformation $S$. Cette équation algébrique ne peut pas être remplie identiquement, puisque autrement une transformation affine tout à fait arbitraire n'altérerait pas la consphéricité des $n+2$ points considérés, ce qui est, comme il est facile de voir, impossible. Considérons maintenant tous les groupes $n$-dimensionaux de $n+2$ points de $E$, les points de chacun desquels sont situés sur une même sphère vide de $E$, et qui ont tous le point $O$ pour point commun. Il ne peut avoir, comme nous l'avons vu, qu'un nombre $k$ limité de tels groupes différents. Soient $\varphi_1(\alpha_{ij})=0$, $\varphi_2(\alpha_{ij})=0, \ldots, \varphi_k(\alpha_{ij})=0$ les équations envisagées pour tous ces groupes. Comme aucune de ces équations algébriques n'est remplie identiqement, on peut, comme il est connu, toujours trouver autant qu'on veut de systèmes de valeurs des $\alpha_{ij}$ aussi peu différents d'un système donné que l'on veut, pour lesquels aucune de ces équations ne soit remplie. En considérant ceux de ces systèmes qui diffèrent peu du système $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\ldots=1$; $\alpha_{ij}=0$ (si $i\neq j$), nous obtenons la transformation $S$ indiquée dans la proposition. (Cette rédaction de la démonstration de la 1-ère proposition a été obtenue dans un entretien avec V. Tartakowski et O. Jitomirski).

Nous pouvons donc étudier seulement les systèmes non spéciaux et envisager les systèmes spéciaux comme leurs cas limites. Dans ce qui suit le système $E$ sera toujours supposé non special.

§ 4. **La partition de l'espace en tétraèdres L pour un système non spécial.** Proposition II. *Les tétraèdres $L$ de $E$ partagent uniformément tout l'espace à $n$ dimensions et sont contigus par des faces entières.* En effet: 1° soit $\sigma$ une face à $n-1$ dimensions d'un tétraèdre $L$; si nous déplaçons le centre de la sphère vide circonscrite à ce tétraèdre perpendiculairement à cette face, en variant son rayon de la sorte qu'elle passe toujours par les points de $E$, qui sont les $n$ sommets de cette face, elle quittera le sommet du tétraèdre $L$, opposé à cette face et elle se heurtera finalement à un point quelconque de $E$, situé du côté opposé de cette face. Ce nouveau point forme avec la face $\sigma$ un nouveau tétraèdre $L$ adjacent à $L$ par la face $\sigma$; 2° il est évident que si les sphères circonscrites à deux tétraèdres $L_1$ et $L_2$ n'ont pas de points communs ou bien se touchent seulement, alors les tétraèdres $L_1$ et $L_2$ n'ont pas de points communs intérieurs, et dans le cas que ces sphères se coupent, les tétraèdres $L_1$ et $L_2$ ont leurs sommets sur les segments de leurs sphères, qui sont situés de côtés opposés du «plan» mené par le «cercle» d'intersection de ces sphères ou bien sur ce «cercle» même, car autrement ce sphères ne seraient pas vides, parce que les autres segments sont intérieurs aux sphères correspondantes; deux tétraèdres $L$ ne peuvent donc pas avoir des points communs intérieurs.

§ 5. **Les domaines D.** Envisageons le domaine $D_0$ de tous les points de l'espace, chacun desquels n'est pas plus loin du point $O$ de $E$ que de tout autre point de $E$. Il est évident que $D_0$ est un polyèdre convexe, parce qu'on peut l'obtenir par exemple en réunissant le point $O$ à tous les points de $E$ par des segments droits et en menant par les milieux de ces segments des «plans» qui leurs sont perpendiculaires, alors le domaine $D_0$ sera la partie de l'espace, située à l'intérieur de tous ces plans, c'est-à-dire du même côté de ces plans où est le point $O$. Les domaines $D$ construits pour les autres points de $E$ sont égaux à $D_0$ et lui sont parallèles. Les polyèdres D partagent uniformément l'espace à $n$ dimensions, puisque chaque point de l'espace n'est aumoins d'un des points de $E$ pas plus loin que de tout autre point de $E$, et qu'il ne peut exister de tels points qui soient plus près de deux points de $E$ à la fois de l'un que de l'autre. Les polyèdres $D$ sont contigus par des faces entières. En effet, si deux polyèdres $D''$ et $D'''$ étaient contigus à un polyèdre $D'$ par les parties d'une même face de $D'$ à $n-1$ dimensions, alors leurs centres devraient être situés sur la perpendiculaire abaissée du centre de $D'$ sur le plan de cette face, et par suite ils devraient coïncider, parce qu'autrement il ne pourrait pas être qu'un point commun au polyèdres $D'$ et $D'''$ soit à égale distance de leurs centres et que cela ait lieu en même temps pour les polyèdres $D'$ et $D'''$.

Comme les $D$ ont des centres de symétrie et sont égaux et paralleles, le milieu du segment, qui unit les centres de deux $D$, qui sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, est le centre de cette face.

§ 6. **Les tétraèdres L et les domaines D d'un système C non spécial.** Il y a une correspondance bien simple entre les tétraèdres $L$ et les domaines $D$ dans le cas, quand le système $E$ n'est pas spécial.

Proposition III: *Les tétraèdres $L$ d'un système $E$ non spécial sont cor-*
*ıtifs aux sommets des polyèdres $D$ de ce système.* En effet, chaque sommet d'un
appartient au moins à $n+1$ $D$ différents dont les centres forment un groupe
points de $E$ à $n$ dimensions. Ce sommet est évidemment le centre d'une
ıère vide passant par ces $n+1$ points de $E$, parce que si cette sphère n'etait
; vide, ce sommet serait plus près du point de $E$ intérieur à cette sphère que
s $n+1$ points de $E$ mentionnés et ne pourrait pas appartenir à leurs do-
ıines $D$. Le tétraèdre construit sur les $n+1$ centres des $n+1$ $D$, qui ont un som-
ət commun, est donc un tétraèdre $L$ de $E$. On voit aussi que dans un système $E$
ın spécial tous les sommets des $D$ sont «simples», c'est-à-dire qu'en chaque
mmet sont contigus seulement $n+1$ domaines $D$. Voronoï nomme de tels
ımmets des sommets primitifs. Chaque sommet d'un $D$ est donc corrélatif à un
ıtraèdre $L$, et inversement. Le groupe de tous les tétraèdres $L$, qui ont un
ommet commun est corrélatif à un $D$ de $E$. Si l'on connaît la partition de $E$
n tétraèdres $L$, on connaît aussi la partition de l'espace en domaines $D$.

**§ 7. Le nombre des types topologiques des systèmes E à n dimensions est limité.**

Proposition IV: *Le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un $D$ n'est pas plus grand que $2\,(2^n-1)$.* Aucun point milieu entre deux points de $E$, c'est-à-dire dont les coordonnées par rapport au groupe de $n$ vecteurs fondamentaux de $E$ ont pour dénominateurs le nombre 2, ne peut être intérieur à un $D$. Cela suit immédiatement de la construction mentionnée de $D$ au moyen des plans passant par les milieux des vecteurs de $E$. Il n'existe que $2^n-1$ milieux entre les points de $E$ qui ne soient pas homologues par rapport au groupe des translations de $E$. Si nous construisons en partant de chacun de ces $2^n-1$ points un système égal et parallèle à $E$, il ne peut avoir dans chacun de ces systèmes deux points qui soient les centres de deux faces d'un $D$, qui ne soient pas symétriques au centre de ce D, parce qu'au cas contraire le milieu de ces deux points, toujours aussi le milieu entre deux points de $E$, serait en raison de la convexité de $D$ un point intérieur de $D$ sans être son centre. Cela démontre la proposition. (Théorème de Minkowski).

Proposition V: *Le nombre de types topologiques différents possibles d'un domaine $D$ d'un système parallélépipédal à $n$ dimensions est limité.* Cela suit du fait qu'en général le nombre des types topologiques de polyèdres convexes à $n$ dimensions ayant un nombre limité $k$ de faces à $n-1$ dimensions est limité. En effet, le nombre des faces à $n-2$ dimensions d'une face à $n-1$ dimensions d'un tel polyèdre ne peut pas être plus grand que $k-1$ (ce qui arrive seulement si le polyèdre est une «pyramide», et la face à $n-1$ dimensions en questions est la base de cette pyramide). Le nombre des faces à $n-3$ dimensions des faces à $n-2$ dimensions ne peut pas être plus grand que $k-2$, et ainsi de suite. Le nombre de leurs contiguités différentes est donc aussi limité.

Le type topologique du domaine $D$ détermine le type topologique de la partition de $E$ en tétraèdres $L$. Nous allons l'appeler — le type topologique de $E$.

§ **8. Theorème fondamental.** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de $n$ vecteurs fondamentaux d'un système $E$ parallélépipédal de points à $n$ dimensions soit lié univoquement au domaine $D$ de ce système, c'est-à-dire à ce système lui-même, est que les produits scalaires de ces vecteurs deux à deux, c'est-à-dire les coefficients de la forme quadratique correspondante au système de vecteurs mentionnés, suffisent à un nombre limité d'inégalités linéaires, qui sont déterminées par le type topologique du système $E$ et par le caractère de liaison de ce système de vecteurs avec le domaine $D$, qui dépend de nos conventions.* Envisageons un système de $n$ vecteurs fondamentaux de $E$ qui soient lié d'une façon donnée avec le domaine $D$ de $E$. Il n'y a qu'un nombre limité de paires non homologues de tétraèdres $L$ de $E$ contigus par des faces à $n$-1 dimensions.

Pour chaque telle paire de tetraèdres $L$ le $n+1$-er sommet de l'un de ces tétraèdres de la paire n'est pas intérieur à la sphère circonscrite à l'autre de ces tétraèdres, et inversement, ce qui suit de la détermination même des tétraèdres $L$. Au contraire, si cela a lieu pour chaque paire de tetraèdres contigus par une face à $n$—1 dimensions, alors ce sont des tétraèdres $L$ parce que selon le lemme général mis à la tête de ce mémoire, aucun sommet d'aucun de ces tétraèdres, c'est-à-dire aucun point du système $E$, n'est intérieur à aucune sphère circonscrite à un tel tétraèdre, c'est-à-dire que cette sphère est vide. Ces conditions sont donc nécessaires et suffisantes. Il ne reste qu'à les exprimer au moyen des coefficients de la forme quadratique positive

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k$$

correspondante au système fondamental choisi des $n$ vecteurs de $E$.

Soient $x_i^{(1)}; x_i^{(2)}; \dots x_i^{(n+1)}$ $(i = 1, 2 \dots n)$ les coordonnées par raport à ce système de vecteurs des sommets du premier tétraèdre $L_1$ d'une telle paire de tétraèdres et $x_i^{(2)}; x_i^{(3)} \dots x_i^{(n+1)}; x_i^{(n+2)}$ ceux des sommets du second $L_2$. Un calcul facile montre que la condition indiquée s'écrit ainsi:

$$\begin{vmatrix} f(x_i^{(1)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(1)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(1)}}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ f(x_i^{(n+2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(n+2)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(n+2)}}, & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(n+2)}}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (1)$$

En effet, si $\xi_i$ sont les coordonnées du centre de la sphère $(L_2)$ et $r_2$ son rayon, on a alors

$$f(x_i^{(m)} - \xi_i) = r_2^2 \quad (m = 2, 3 \ldots n+2)$$

ou bien

$$f(x_i^{(m)}) - \frac{\partial f}{\partial x_1^{(m)}} \cdot \xi_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n^{(m)}} \cdot \xi_n + f(\xi_i) - r_2^2 = 0,$$

et si $t_i$ est un point sur $(L_2)$ alors on a encore l'équation

$$f(t_i) - \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \xi_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial t_n} \cdot \xi_n + f(\xi_i) - r_2^2.$$

On obtient donc l'équation suivante de la sphère $(L_2)$:

$$\begin{vmatrix} f(t_i), & \frac{\partial f}{\partial t_1}, & \frac{\partial f}{\partial t_2}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial f}{\partial t_n}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(2)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(2)}}, & \ldots\ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(2)}}, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ f(x_i^{(n+2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(n+2)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(n+2)}}, & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(n+2)}}, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Si l'on numère les sommets de $T_2$ de manière que mineur de $f(t_i)$ dans (2) soit positif, on obtient la condition (1).

Le déterminant (1) peut facilement être transformé en le produit suivant:

$$(-1^n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x_i^{(1)}), & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots\ldots & x_n^{(1)}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), & x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots\ldots & x_n^{(2)}, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ f(x_i^{(n+2)}), & x_1^{(n+2)}, & x_2^{(n+2)}, & \ldots & x_n^{(n+2)}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (3)$$

Mais le premier déterminant est le discriminant de la forme positive $f(x_i)$, il est ici positif, la condition (1) se réduit donc à ce que le second déterminant

(3) ne soit pas négatif. En développant ce déterminant par la première colonne, on obtient l'inégalité:

$$\rho = (-1)^n \sum a_{ik} \cdot \begin{vmatrix} x_i^{(1)} x_k^{(1)}, & x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)} \ldots . x_n^{(1)}, & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_i^{(n+2)} x_k^{(n+2)}, & x_1^{(n+2)} \, x_2^{(n+2)} \ldots x_n^{(n+2)}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (4)$$

Soient $\rho_1, \; \rho_2 \ldots \rho_\varkappa$ les formes linéaires par rapport à $a_{ik}$ (4) correspondantes à toutes les $\varkappa$ paires de tétraèdres non homologues mentionnées. Les conditions en question s'écrivent alors ainsi:

$$\rho_1 \geqq 0; \;\; \rho_2 \geqq 0; \ldots\ldots \rho_\varkappa \geqq 0.$$

## Б. Н. ДЕЛОНЕ. О ПУСТОМ ШАРЕ


РЕЗЮМЕ

Знаменитая посмертная работа Вороного, помещенная в 134-м и 136-м томах Журнала Крелля, очень трудна для чтения. Даже Бахманн, включивший в свой компендиум все важнейшие русские работы по теории квадратичных форм, пишет, что он не решается излагать это трудное исследование.

Только-что исполнилось 25-летие со дня смерти Вороного. Я думаю, что лучшим способом почтить эту дату явилось бы опубликование исследований, продолжающих и упрощающих трудные исследования Вороного.

Настоящая работа содержит простой вывод теоремы указанного большого мемуара Вороного, которая в нем названа «Фундаментальной». Оказывается, что эта теорема является непосредственным следствием одной совсем общей леммы, которая, может быть, найдет себе приложения и в анализе.